

Cambridge International AS & A Level

CANDIDATE NAME					
CENTRE NUMBER			CANDIDATE NUMBER		

MATHEMATICS 9709/33

Paper 3 Pure Mathematics 3

May/June 2023

1 hour 50 minutes

You must answer on the question paper.

You will need: List of formulae (MF19)

INSTRUCTIONS

- Answer all questions.
- Use a black or dark blue pen. You may use an HB pencil for any diagrams or graphs.
- Write your name, centre number and candidate number in the boxes at the top of the page.
- Write your answer to each question in the space provided.
- Do **not** use an erasable pen or correction fluid.
- Do not write on any bar codes.
- If additional space is needed, you should use the lined page at the end of this booklet; the question number or numbers must be clearly shown.
- You should use a calculator where appropriate.
- You must show all necessary working clearly; no marks will be given for unsupported answers from a calculator.
- Give non-exact numerical answers correct to 3 significant figures, or 1 decimal place for angles in degrees, unless a different level of accuracy is specified in the question.

INFORMATION

- The total mark for this paper is 75.
- The number of marks for each question or part question is shown in brackets [].

This document has 20 pages.

•	•••••
•	•••••
•	
•	
•	•••••
•	•••••
•	•••••
	•••••
•	•••••
•	•••••
	•••••

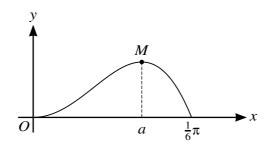
 •••••
••••••
 •••••
••••••
 •••••
••••••
••••••
•••••
 •••••
•••••••

3 On a sketch of an Argand diagram, shade the region whose points represent complex numbers z satisfying the inequalities $|z-3-i| \le 3$ and $|z| \ge |z-4i|$. [4]

[5]

4	The parametric equations of a	curve are		
		$x = \frac{\cos \theta}{2 - \sin \theta},$	$y = \theta + 2\cos\theta.$	
	Show that $\frac{dy}{dx} = (2 - \sin \theta)^2$.			[5]
				 •••••
				 •••••
				 •••••

5



The diagram shows the part of the curve $y = x^2 \cos 3x$ for $0 \le x \le \frac{1}{6}\pi$, and its maximum point M, where x = a.

(a)	Show that a satisfies the equation $a = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{2}{3a} \right)$.	[3]

G	ive the result of each iteration to 4 decimal places.	
• •		
••		
••		
••		
••		•••••
••		••••••
••		
•••		•••••
•••		•••••
••		•••••
• • •		•••••
••		•••••
•••		•••••
••		
••		
••		
••		
••		

	State the exact value of R and give α correct to 2 decimal places.	
•		•••••
•		•••••
		•••••
• •		••••••
•		•••••
•		•••••
		•••••
•		•••••
		•••••
		•••••
•		•••••
•		•••••
		•••••
•		•••••

(b)	Hence	solve	the	equation

3	cos '	$2\theta +$	2.cost	$(2\theta -$	60°	= 2.5
J	COS	20 I	2 CO3	20	UU ,	, — 2

for $0^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$.	[4]

7 (a)	Use the substitution $u = \cos x$ to show that	
	$\int_0^{\pi} \sin 2x e^{2\cos x} dx = \int_{-1}^1 2u e^{2u} du.$	[4]
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••
		••••

[-	$\cos x \mathrm{d}x.$	the exact value of $\int_0^{\pi} s$

Ω	7D1 '11	1	. C .1	1.00	4. 1	
8	The variables x	าลทศ พ	Safisty fr	ne differe	าบาลเลเ	าบลยากท

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + 4}{x(y+4)}$$

for x > 0. It is given that x = 4 when $y = 2\sqrt{3}$.

Solve the differential equation to obtain the value of x when $y = 2$.	[8]
	••••
	••••

9 The lines l and m have equations

l:
$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + b\mathbf{k} + \lambda(c\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}),$$

m: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \mu(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}).$

Relative to the origin O, the position vector of the point P is $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Given ina	t <i>l</i> is perpen	idicular to	m and tha	it I lies of	i t, iiid tiid	e values of	the cons	tants a, b and
•••••			•••••				•••••	
•••••		•••••		•••••	•••••		•••••	
•••••							•••••	
•••••			•••••			•••••		
			•••••		•••••			
•••••		•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	
•••••			•••••		•••••			
•••••			•••••		•••••			
			•••••					
•••••			•••••					
•••••		•••••	••••		•••••		•••••	
•••••		•••••	•••••		•••••		•••••	
•••••			••••					

Find the position vector of R .			
	•••••		
		•••••	
	•••••	••••••	
	•••••	••••••	
	•••••		
	•••••	••••••	

10	Let $f(x) =$	$21 - 8x - 2x^2$				
10	Let $\Gamma(x) =$	$\frac{21 - 8x - 2x^2}{(1 + 2x)(3 - x)^2}$				

(a)	Express $f(x)$ in partial fractions.	[5]

•••																				
•••		•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••		•••••	•••••	• • • • • • •	•••••	•••••	•••••	•••••	• • • • • • •	•••••	•••••	•••••	•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••
•••	•••••			•••••	•••••			•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••			•••••	• • • • • • •					•••••	•••
•••	•••••	••••••	••••••	•••••	•••••	••••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	••••••	•••••	•••••	••••••	•••
•••					•••••			•••••						•••••			•••••			•••
•••	•••••	•••••	• • • • • • • • •	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	• • • • • • •	•••••		•••••	•••••	••••••	•••
														•••••						•••
•••	•••••	••••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	••••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	••••••	•••
														• • • • • • •						
•••		•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	••••••	•••
														• • • • • • •						
•••		•••••	• • • • • • • • •	•••••	•••••		• • • • • •	•••••	• • • • • • •	•••••	• • • • • •	•••••	•••••	• • • • • • •	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••
•••		•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••			•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	•••••	•••
•••		•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••			•••••	•••••	•••••	•••••		•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	•••••	•••
•••	•••••	•••••	••••••	•••••	•••••		•••••	•••••		•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••
														• • • • • • •						
•••		•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••			•••••	• • • • • • •	•••••	• • • • • • •		• • • • • • •	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••	•••••	•••••		•••••	•••
•••														• • • • • • •						•••
•					.,															•
•••		•••••		•••••	•••••			•••••		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •				•••••	•••••		•••••			•••

11	The	complex number z is defined by $z = \frac{5a - 2i}{3 + ai}$, where a is an integer. It is given that $\arg z = -\frac{1}{4}\pi$.
	(a)	Find the value of a and hence express z in the form $x + iy$, where x and y are real. [6]

Express z^3 in the form $re^{i\theta}$, where $r>0$ and $-\pi<\theta\leqslant\pi$. Give the simplified exact value r and θ .					
r and θ .				•••••	
r and θ.					
r and θ.					
r and θ.					
r and θ.					
r and θ.	••••••	•••••	•••••	•••••	
r and θ .					
r and θ .					
r and θ .	•••••			•••••	
r and θ .				•••••	
r and θ .					
r and θ .					
r and θ .					
r and θ .					
r and θ .	•••••			•••••	
r and θ .					
r and θ .	•••••	•••••	•••••	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••••
	Express z^3 in the	e form $re^{i\theta}$, where i	$r > 0$ and $-\pi < \theta \le$	$\leq \pi$. Give the simple	plified exact value
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where i	$r > 0$ and $-\pi < \theta \le$	$\leq \pi$. Give the sim	plified exact valu
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where r	$r > 0$ and $-\pi < \theta \le$	$\leq \pi$. Give the simple	plified exact valu
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta $	$\leq \pi$. Give the sim	plified exact valu
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta \le$	ξ π. Give the sim	plified exact value
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta \le$	ξ π. Give the sim	plified exact valu
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta \le$	ξ π. Give the sim	plified exact valu
	Express z^3 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta$	ξ π. Give the sim	plified exact valu
	Express z^2 in the r and θ .	e form $re^{i\theta}$, where $re^{i\theta}$	$\tau > 0$ and $-\pi < \theta \le 0$	ξ π. Give the sim	plified exact valu
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				
	r and θ.				

Additional Page

If you use the following lined page to complete the answer(s) to any question(s), the question number(s must be clearly shown.

Permission to reproduce items where third-party owned material protected by copyright is included has been sought and cleared where possible. Every reasonable effort has been made by the publisher (UCLES) to trace copyright holders, but if any items requiring clearance have unwittingly been included, the publisher will be pleased to make amends at the earliest possible opportunity.

To avoid the issue of disclosure of answer-related information to candidates, all copyright acknowledgements are reproduced online in the Cambridge Assessment International Education Copyright Acknowledgements Booklet. This is produced for each series of examinations and is freely available to download at www.cambridgeinternational.org after the live examination series.

Cambridge Assessment International Education is part of Cambridge Assessment. Cambridge Assessment is the brand name of the University of Cambridge Local Examinations Syndicate (UCLES), which is a department of the University of Cambridge.